

1. Tutorium Multivariate Verfahren

- Multivariate Verteilungen -

Giuseppe Casalicchio:

29.04.2013 und 06.05.2013

Moritz Berger:

25.04.2013 und 02.05.2013

Institut für Statistik, LMU München

Gliederung

- 1 Mehrdimensionale Zufallsvariablen
- 2 Multivariate Verteilungen
- 3 Verteilungs-Überblick
- 4 Multivariate Schätzung
- 5 Rechenregeln für Matrizen

Gliederung

- 1 Mehrdimensionale Zufallsvariablen
- 2 Multivariate Verteilungen
- 3 Verteilungs-Überblick
- 4 Multivariate Schätzung
- 5 Rechenregeln für Matrizen

- p-dimensionale Zufallsvariable X :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \text{ wobei } X_1, \dots, X_p \text{ Zufallsvariablen}$$

- Komponentenweiser Erwartungswert(vektor):

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}$$

- Kovarianz:

$$\mathbf{\Sigma} = \text{Cov}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)(X - \mu)^\top] = \begin{pmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \dots & \text{cov}(X_1, X_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_p, X_1) & \dots & \text{cov}(X_p, X_p) \end{pmatrix}$$

- Korrelation:

$$\mathbf{P} = (\rho_{ij})_{p \times p} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{\Sigma} \mathbf{D}^{-1} \text{ mit } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_p \end{pmatrix}$$

$$\text{da } \rho_{ij} = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{var}(X_i)} \sqrt{\text{var}(X_j)}}$$

Gliederung

- 1 Mehrdimensionale Zufallsvariablen
- 2 Multivariate Verteilungen**
- 3 Verteilungs-Überblick
- 4 Multivariate Schätzung
- 5 Rechenregeln für Matrizen

Multivariate Normalverteilung

- X heißt p -dimensional normalverteilt mit Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$: $X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

- Dichte:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

- Insbesondere ist in $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ jede Komponente X_i normalverteilt: $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

Wishartverteilung

- M heißt wishart-verteilt mit Kovarianzmatrix Σ und m Freiheitsgraden: $M \sim W_p(\Sigma, m)$
- Zusammenhang zur p -dimensionalen Normalverteilung:
 - Seien $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \stackrel{\text{iid}}{\sim} N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$
 - Sei weiterhin $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$
 - Dann gilt: $\mathbf{M} \sim W_p(\Sigma, m)$
- Eindimensionales Pendant: χ^2 -Verteilung

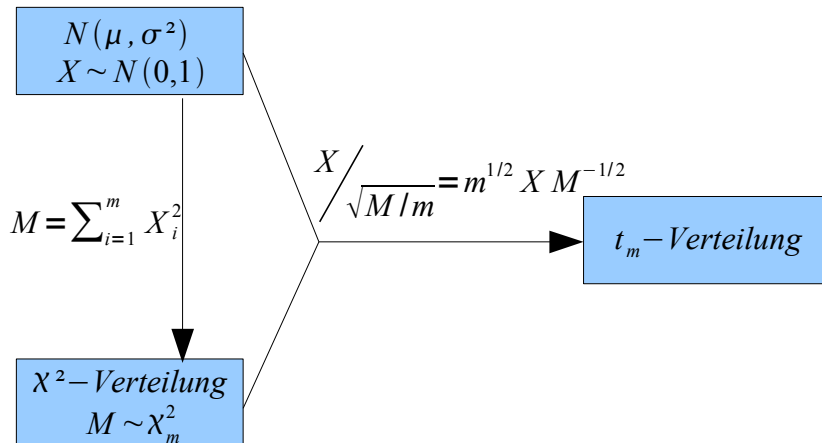
Hotellings T^2 -Verteilung

- X ist Hotelling- T^2 -verteilt mit p und m Freiheitsgraden:
$$X \sim T^2(p, m)$$
- Zusammenhang zur p -dimensionalen Normalverteilung und Wishartverteilung:
 - Sei $\mathbf{d} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ und $\mathbf{M} \sim W_p(\mathbf{I}, m)$
 - $\mathbf{d}$ und $\mathbf{M}$ seien unabhängig
 - Dann gilt: $m\mathbf{d}^\top \mathbf{M}^{-1} \mathbf{d} \sim T^2(p, m)$
- Eindimensionales Pendant: Student-t-Verteilung

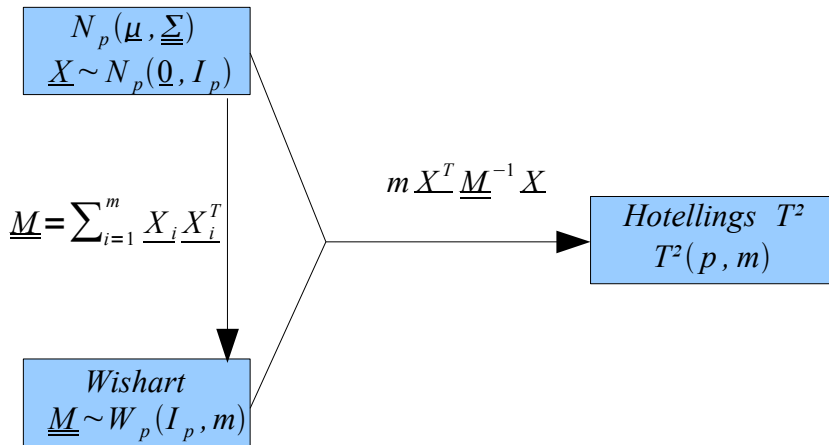
Gliederung

- 1 Mehrdimensionale Zufallsvariablen
- 2 Multivariate Verteilungen
- 3 Verteilungs-Überblick**
- 4 Multivariate Schätzung
- 5 Rechenregeln für Matrizen

Univariate Verteilungen



Multivariate Verteilungen



Gliederung

- 1 Mehrdimensionale Zufallsvariablen
- 2 Multivariate Verteilungen
- 3 Verteilungs-Überblick
- 4 Multivariate Schätzung**
- 5 Rechenregeln für Matrizen

Schätzung für $\mu = \mathbb{E}(X)$

- Gegeben sei die Datenmatrix $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}$$

- Schätzung des Erwartungswerts mittels des Mittelwertsvektors

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{pmatrix}$$

Schätzung der Kovarianzmatrix Σ (Vektordarstellung)

- Erwartungstreuer Schätzer $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top - n \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}^\top \right)$$

- Alternativer Schätzer

$$\hat{\Sigma} = \frac{n-1}{n} \mathbf{S} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top - n \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}^\top \right)$$

Schätzung der Kovarianzmatrix Σ (Matrixdarstellung)

- Betrachte Zentrierungsmatrix $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{H}\mathbf{X}$ enthält zentrierte Daten
- Erwartungstreuer Schätzer $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} (\mathbf{H}\mathbf{X})^\top (\mathbf{H}\mathbf{X}) = \frac{1}{n-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{H} \mathbf{X} = \frac{1}{n-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{H} \mathbf{X}$$

- $\mathbf{H}$ ist idempotent und symmetrisch

Eigenschaften von $\mathbf{S}$

- Erwartungstreue

$$\mathbb{E}(\mathbf{S}) = \mathbf{\Sigma}$$

- Verteilung von $\mathbf{S}$

Wenn $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$, dann gilt:

$$(n-1)\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top \sim W_p(\mathbf{\Sigma}, n-1)$$

Gliederung

- 1 Mehrdimensionale Zufallsvariablen
- 2 Multivariate Verteilungen
- 3 Verteilungs-Überblick
- 4 Multivariate Schätzung
- 5 Rechenregeln für Matrizen**

Rechenregeln für Matrizen

- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top = \mathbf{B}^\top + \mathbf{A}^\top$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
- $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{x} = (\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y})^\top$
- $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top \mathbf{A} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}$

Binomische Formel

- Erinnerung: Binomische Formel mit Skalaren

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Falls $\mathbf{A}$ symmetrisch

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{y}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}$$

Ableitungsregeln

- $\frac{\partial \mathbf{y}^\top \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y}$
- $\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{x} \mathbf{y}^\top$
- $\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \cdot \mathbf{x}$
- $\mathbf{A}$ symmetrisch $\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \cdot \mathbf{x} = 2\mathbf{A} \mathbf{x} = 2\mathbf{A}^\top \mathbf{x}$