

4.Tutorium Generalisierte Regression

- Tests/Devianz -

Cynthia Huber:

25.11.2014 und 02.12.2014

Michael Hanselmann:

27.11.2014 und 04.12.2014

Institut für Statistik, LMU München

Gliederung

- 1 Testen linearer Hypothesen
- 2 LR-Test
- 3 Alternative Tests
- 4 Devianz
- 5 LR-Test mit R

Gliederung

1 Testen linearer Hypothesen

2 LR-Test

3 Alternative Tests

4 Devianz

5 LR-Test mit R

Mögliche Problemstellungen und Hypothesen

Häufige Problemstellungen:

- (a) Sind die Modellparameter überhaupt aussagekräftig, oder würde ein reines Interceptmodell genügen?
- (b) Kann man Einflussgrößen aus dem Modell herausnehmen, ohne die Güte des Fits dabei zu stark zu beeinträchtigen?

Zugehörige Hypothesen:

- zu (a) $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = 0$; β_0 beliebiger Intercept
 $H_1: \beta_j \neq 0$ für mind. ein $j > 0$ [$j=1, \dots, p$]
- zu (b) $H_0: \beta \in \Omega_0$
 $H_1: \beta \in \Omega_1$; mit $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$

Leicht zu erkennen: (a) ist Spezialfall von (b)

Darstellung linearer Hypothesen

- Lineare Hypothesen ($\mathbf{C}$ mit vollem Spaltenrang!)

$$H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \delta$$

$$H_1 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} \neq \delta$$

- Beispiel:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \dots)}_{\mathbf{C}} \boldsymbol{\beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 - \beta_3 = 0$$

- Der Rang von $\mathbf{C}$ bestimmt die Anzahl an Hypothesen!

Gliederung

- 1 Testen linearer Hypothesen
- 2 LR-Test
- 3 Alternative Tests
- 4 Devianz
- 5 LR-Test mit R

Form des LR-Tests

- Hypothesen:

$$H_0: \beta \in \Omega_0$$

$$H_1: \beta \in \Omega_1 ; \quad \text{mit } \Omega_0 \subseteq \Omega_1$$

- Likelihood-Quotient(LQ)/Likelihood-Ratio(LR):

$$\Lambda = \frac{\max L(\beta | \Omega_0)}{\max L(\beta | \Omega_1)}$$

- Falls $\beta \in \Omega_0 \Leftrightarrow \mathbf{C}\beta = \delta$ (als lineare Hypothese) $\Rightarrow \Lambda \approx 1!$

Form des LR-Tests

- Teststatistik:

$$\lambda = -2\log(\Lambda) = -2[\ell(\tilde{\beta}) - \ell(\hat{\beta})]$$

$\tilde{\beta}$ ist ML-Schätzer unter H_0

$\hat{\beta}$ ist ML-Schätzer unter H_1

- Ablehnungsbereich:

$$\lambda > \chi_{rg(\mathbf{C})}^{2(1-\alpha)}$$

Gliederung

- 1 Testen linearer Hypothesen
- 2 LR-Test
- 3 Alternative Tests**
- 4 Devianz
- 5 LR-Test mit R

Wald-Test

- Prinzip: Betrachte die Differenz $\mathbf{C}\hat{\beta} - \delta$
- Teststatistik:

$$w = (\mathbf{C}\hat{\beta} - \delta)^T (\mathbf{C}F(\hat{\beta})^{-1}\mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{C}\hat{\beta} - \delta)$$

- Falls H_0 nicht wahr $\Rightarrow \mathbf{C}\hat{\beta} - \delta$ groß!
- Spezialfall: $H_0 : \beta_r = 0$

$$w = \left(\frac{\hat{\beta}_r}{\sqrt{a_{rr}}} \right)^2 \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(1)$$

(a_{rr} ist r-tes Diagonalelement von $F(\hat{\beta})^{-1}$)

Scoretest

- Prinzip: Betrachte Scorefunktion

$$s(\beta) = \mathbf{x} \mathbf{D}(\beta) \Sigma(\beta)^{-1} [\mathbf{y} - \mu(\beta)]$$

- Teststatistik:

$$s = s(\tilde{\beta})^T F(\tilde{\beta})^{-1} s(\tilde{\beta})$$

- Falls H_0 wahr, sollte $s(\tilde{\beta})$ ähnlich sein zu $s(\hat{\beta})$, also 0!

Vergleich von LR-, Wald- und Score-Test:

- Gemeinsamkeit: $\lambda, w, s \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(\text{rg}(\mathbf{C}))$
- Berechnung von w ausschließlich auf Basis von $\hat{\beta}$
- Berechnung von s ausschließlich auf Basis von $\tilde{\beta}$
- λ am kompliziertesten zu berechnen, da $\hat{\beta}$ und $\tilde{\beta}$ berechnet werden müssen. Aber dafür exakteste Teststatistik
- λ durch w und s approximierbar
- λ, w und s asymptotisch effizient

Gliederung

- 1 Testen linearer Hypothesen
- 2 LR-Test
- 3 Alternative Tests
- 4 Devianz**
- 5 LR-Test mit R

Definition

- Maß für die Anpassungsgüte des Modells an die Daten
- Devianz

$$D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = -\phi 2 \left(\underbrace{\ell(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}})}_{\text{Likelihood des Modells}} - \underbrace{\ell(\mathbf{y}, \mathbf{y})}_{\text{Likelihood des saturierten Modells}} \right)$$

- Betrachte Form der Exponentialfamilie

$$D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = 2 \sum_{i=1}^n (y_i(\theta(y_i) - \theta(\hat{\mu}_i)) - (b(\theta(y_i)) - b(\theta(\hat{\mu}_i))))$$

- Beispiel: Normalverteilung

$$D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}_i)^2$$

LR-Test und Devianz

Die Teststatistik des LR-Tests ist über die Devianzen der zu vergleichenden Modelle berechenbar:

$$\begin{aligned}\lambda &= -2\log(\Lambda) \\&= -2[\ell(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}|\Omega_0) - \ell(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}|\Omega_1)] \\&= -2[\ell(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}|\Omega_0) - \ell(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - \ell(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}|\Omega_1) + \ell(\mathbf{y}, \mathbf{y})] \\&= \frac{D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}|\Omega_0) - D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}|\Omega_1)}{\phi}\end{aligned}$$

Gliederung

- 1 Testen linearer Hypothesen
- 2 LR-Test
- 3 Alternative Tests
- 4 Devianz
- 5 LR-Test mit R**

LR-Test mit R

[vgl. Problemstellungen auf Folie 4]

zu (a) • Berechnung über Summary:

$$\frac{\text{Null Deviance} - \text{Residual Deviance}}{\text{Dispersion Parameter}} \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2_{rg(\mathbf{C})}$$

• Berechnung über `lrtest(Modell)` aus Package `lmtest`

zu (b) • Berechnung über Summaries:

$$\frac{\text{Residual D}_{\Omega_0} - \text{Residual D}_{\Omega_1}}{\text{Dispersion Parameter}} \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2_{rg(\mathbf{C})}$$

• Berechnung über `lrtest(Modell| $\Omega_0$ , Modell| $\Omega_1$ )`

[$\Rightarrow$ Identische Dispersionsparameter ϕ für beide Modelle nötig!]