Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 1: Geometrisches Modell

a) Mithilfe von Formelsammlung S.8:

$$
\begin{aligned}
f(y|p) = p(1-p)^y &= \exp\{\log\left(p(1-p)^y\right)\} \\
&= \exp\{\log(p) + y\log(1-p)\} \\
&= \exp\left\{\frac{y\log(1-p) - (\text{-}\log(p))}{1}\right\}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

- $\phi = 1$
- $\theta = \log(1-p) \Rightarrow \exp\{\theta\} = 1-p \Rightarrow p = 1-\exp\{\theta\}$
- $b(p) = \text{-}\log(p) \Rightarrow b(\theta) = \text{-}\log(1-\exp\{\theta\})$

b) Mithilfe der Formelsammlung S.8 und S.9:

- Kanonischer Link:

$$\theta = \eta = \underline{x}^T\underline{\beta} = \log(1-p) \overset{!?}{=} g(\mu)$$

- Ermittlung von μ:[1]

$$
\begin{aligned}
\mu = b'(\theta) &= -\frac{\partial\log(1-\exp\{\theta\})}{\partial\theta} \\
&= -\frac{1}{1-\exp\{\theta\}} \cdot (-\exp\{\theta\}) \\
&= \frac{\exp\{\theta\}}{1-\exp\{\theta\}} \overset{\text{nat. Link}}{=} \frac{\exp\{\eta\}}{1-\exp\{\eta\}} = \mu
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Für die Responsefunktion $h(\eta)$ gilt also:

$$h(\eta) = \mu = \frac{\exp\{\eta\}}{1-\exp\{\eta\}}$$

$\Longrightarrow$ Für die Linkfunktion $g(\mu)$ als Umkehrfunktion von $h(\eta)$ gilt:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1-\exp\{\eta\}}{\exp\{\eta\}} = \frac{1}{\exp\{\eta\}} - 1$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\mu} = \frac{\mu+1}{\mu} = \frac{1}{\exp\{\eta\}}$$

[1] Der Erwartungswert kann - sofern man ihn kennt - auch direkt eingesetzt werde. Beachte allerdings, dass HIER für $y \in \{\mathbf{0}, 1, 2, 3, ...\}$ gilt: $E(y) = \frac{1-p}{p}$
(Für $y \in \{1, 2, 3, ...\}$ hingegen gilt: $E(y) = \frac{1}{p}$)

$$\Rightarrow \frac{\mu}{1+\mu} = \exp\{\eta\}$$

$$\Rightarrow \eta = \underline{x}^T \underline{\beta} = \log\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$$

c) Mithilfe von Formelsammlung S.10:

$$l(\underline{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} l_i(\underline{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i\theta_i - b(\theta_i))}{\phi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i \underline{x}_i{}^T \underline{\beta} + \log(1 - \exp\{\underline{x}_i{}^T \underline{\beta}\})}{1}$$

$$s(\underline{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} s_i(\underline{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial l_i(\underline{\beta})}{\partial \underline{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} y_i \underline{x}_i + \frac{1}{1 - exp\{\underline{x}_i{}^T \underline{\beta}\}} \cdot (-exp\{\underline{x}_i{}^T \underline{\beta}\}) \cdot \underline{x}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i \left(y_i - \frac{exp\{\underline{x}_i{}^T \underline{\beta}\}}{1 - exp\{\underline{x}_i{}^T \underline{\beta}\}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i (y_i - h(\eta_i)) = \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i (y_i - \mu_i) = \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i \frac{(y_i - \mu_i)}{\underbrace{\phi_i}_{1}}$$

Form der Score-Funktion aus der Formelsammlung:

$$s(\underline{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i \frac{\partial h(\eta_i)}{\partial \eta} \frac{(y_i - \mu_i)}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i \frac{\partial h(\eta_i)}{\partial \eta} \frac{(y_i - \mu_i)}{v(\mu_i)\phi_i}$$

Grund für den Unterschied in den Score-Funktionen:
Bei Verwendung des natürlichen Links vereinfacht sich die Score-Funktion dahingehend, dass sich Varianzfunktion $v(\mu_i)$ und Derivierte $\frac{\partial h(\eta_i)}{\partial \eta}$ gegenseitig aufheben. Bei Verwendung eines anderen Links bleibt die Score-Funktion in ihrer allgemeineren Form. Dies gilt für alle Typen von üblichen GLMs.